Série 13 - Analyse géométrique

1 Algèbre géométrique de l'espace-temps

Objectif : étudier les propriétés de l'algèbre géométrique de l'espace-temps.
Théorie : algèbre géométrique, relativité restreinte.
Difficulté : ☆☆☆★ facultatif.

Dans l'algèbre de l'espace-temps $\mathbb{G}^{1,3}$, on considère un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Le produit géométrique des vecteurs d'espace-temps s'écrit,

$$\hat{e}_\mu \, \hat{e}_\nu = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu + \hat{e}_\mu \wedge \hat{e}_\nu \qquad \text{où} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\,.$$

où le produit intérieur est symétrique et le produit extérieur est antisymétrique,

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \hat{e}_\nu \cdot \hat{e}_\mu \qquad \text{et} \qquad \hat{e}_\mu \wedge \hat{e}_\nu = -\, \hat{e}_\nu \wedge \hat{e}_\mu\,.$$

Avec la convention de signature $(+,-,-,-)$, la métrique de Minkowski est représentée dans la base orthonormée de l'espace-temps par la matrice,

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ainsi} \qquad \eta_{\mu\nu} = 2\, \delta_{\mu 0}\, \delta_{\nu 0} - \, \delta_{\mu\nu}\,.$$

Le carré des vecteurs orthonormaux s'écrit,

$$\hat{e}_0^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \hat{e}_i^2 = -\,1 \qquad \text{où} \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Les vecteurs de l'algèbre géométrique spatiale $\mathbb{G}^3$ sont des bivecteurs d'espace-temps $\mathbb{G}^{1,3}$,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{e}_i \, \hat{e}_0 = \hat{e}_i \wedge \hat{e}_0 \qquad \text{où} \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

a) Montrer que le pseudoscalaire I s'écrit,

$$I = \hat{e}_0 \, \hat{e}_1 \, \hat{e}_2 \, \hat{e}_3\,,$$

et vérifier que $I^2 = -\,1$.

b) Montrer que les vecteurs du repère orthonormé satisfont l'algèbre de Dirac,

$$\{\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu\} = \hat{e}_\mu\, \hat{e}_\nu + \hat{e}_\nu\, \hat{e}_\mu = 2\, \eta_{\mu\nu} \qquad \text{où} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\,.$$

En déduire que les vecteurs d'espace satisfont l'algèbre de Pauli,

$$\begin{aligned} &\{\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_j\} = \hat{\boldsymbol{e}}_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_j + \hat{\boldsymbol{e}}_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i = 2\, \delta_{ij}\,, \\ &[\, \hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_j\,] = \hat{\boldsymbol{e}}_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_j - \hat{\boldsymbol{e}}_j\, \hat{\boldsymbol{e}}_i = 2\, \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{I}\, \hat{\boldsymbol{e}}_k \qquad \text{où} \qquad i, j, k = 1, 2, 3\,. \end{aligned}$$

c) Montrer que les matrices de Dirac sont une représentation matricielle de l'algèbre de Dirac,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

c'est-à-dire que,

$$\gamma_\mu\, \gamma_\nu + \gamma_\nu\, \gamma_\mu = 2\, \eta_{\mu\nu}\, \mathbb{1}_4 \qquad \text{où} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\,.$$

2 Equation de Maxwell spatio-temporelle

⦿ **Objectif** : exprimer l'équation de Maxwell dans l'algèbre géométrique de l'espace-temps.

📖 **Théorie** : analyse géométrique, relativité restreinte.

✍ **Difficulté** : ★★★★ facultatif.

Dans un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ de l'espace-temps, le quadrivecteur densité de courant électrique J et l'opérateur quadrivectoriel gradient ∇ s'écrivent,

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\mu=0}^{3} J_\mu\, \hat{e}_\mu = J_0\, \hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} J_i\, \hat{e}_i = c\rho\, \hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} j_i\, \hat{e}_i\,, \\ \nabla &= \sum_{\mu=0}^{3} \hat{e}_\mu\, \partial_\mu = \hat{e}_0\, \partial_0 - \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i\, \partial_i = \hat{e}_0\, \frac{1}{c}\, \partial_t - \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i\, \partial_i\,. \end{aligned}$$

où le signe $-$ est dû au fait que le quadrivecteur gradient est covariant alors que le quadrivecteur densité de courant électrique est contravariant. Dans un repère orthonormé fixe $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ de l'espace, le vecteur densité de courant électrique $\boldsymbol{j}$ et l'opérateur spatial gradient s'écrivent,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{j} &= \sum_{i=1}^{3} j_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} j_i\, \hat{e}_i\, \hat{e}_0 = \sum_{i=1}^{3} J_i\, \hat{e}_i \wedge \hat{e}_0\,, \\
\boldsymbol{\nabla} &= \sum_{i=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}_i\, \partial_i = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i\, \hat{e}_0\, \partial_i = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \wedge \hat{e}_0\, \partial_i\,.
\end{aligned}
$$

Dans l'algèbre géométrique $\mathbb{G}^3$, l'équation de Maxwell s'écrit,

$$
\left(\frac{1}{c}\,\partial_t + \boldsymbol{\nabla}\right) G = \frac{1}{c}\left(c\rho - \boldsymbol{j}\right)\,,
$$

et l'équation d'onde électromagnétique s'écrit,

$$
\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\right) G = \boldsymbol{\nabla}\,\rho - \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\,\partial_t\, \boldsymbol{j}\,.
$$

L'équation constitutive entre les multivecteurs champs électromagnétiques s'écrit,

$$
G = \varepsilon_0\, F \qquad \text{où} \qquad F = \boldsymbol{e} + c\,\boldsymbol{B} \qquad \text{et} \qquad G = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{H}\,.
$$

Par conséquent, les relations constitutives électromagnétiques s'écrivent,

$$
\boldsymbol{d} = \varepsilon_0\, \boldsymbol{e} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}\,\boldsymbol{H} = \mu_0\, \boldsymbol{H} \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}^*\,.
$$

L'équation de continuité électrique s'écrit,

$$
\partial_t\, \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0\,.
$$

a) Exprimer l'équation de continuité électrique dans l'algèbre de l'espace-temps $\mathbb{G}^{1,3}$ en termes des quadrivecteurs densité de courant électrique J et gradient ∇.

b) Exprimer l'équation de Maxwell dans l'algèbre de l'espace-temps $\mathbb{G}^{1,3}$ en termes des quadrivecteurs densité de courant électrique J et gradient ∇ à l'aide des produits géométriques $\hat{e}_0\, J$ et $\hat{e}_0\, \nabla$.

c) En déduire que le d'Alembertien dans l'espace-temps s'écrit,

$$
\Box = \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\,.
$$

d) Exprimer l'équation d'onde électromagnétique dans l'algèbre de l'espace-temps à l'aide des quadrivecteurs densité de courant électrique J, gradient ∇ et d'Alembertien $\Box$.

3 Bivecteurs champs électromagnétiques dans l'espace-temps

Objectif : montrer que les multivecteurs champs électromagnétiques sont des bivecteurs dans l'espace-temps et déterminer leur représentation matricelle.

Théorie : algèbre géométrique, relativité restreinte.

Difficulté : ☆☆☆☆ facultatif.

Les multivecteurs champs électromagnétiques dans l'algèbre géométrique $\mathbb{G}^3$ sont définis comme,

$$F = \boldsymbol{e} + c\,\boldsymbol{B} \qquad \text{et} \qquad G = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{H}\,.$$

et les relations constitutives dans le vide sont,

$$G = \varepsilon_0\,F \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{d} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{e} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\,\boldsymbol{H} = \mu_0\,\boldsymbol{H}\,.$$

a) Dans un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ de l'espace-temps, montrer que le multivecteur champ électromagnétique F est un bivecteur de la forme,

$$F = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}\,\hat{e}_\mu \wedge \hat{e}_\nu \qquad \text{où} \qquad F_{\mu\nu} = -\,F_{\nu\mu}\,.$$

b) Déterminer la matrice de composantes $F_{\mu\nu}$ représentant le bivecteur champ électromagnétique F dans le repère orthonormé $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ en termes des composantes e_1, e_2 et e_3 du vecteur champ électrique et composantes b_1, b_2 et b_3 du pseudovecteur champ magnétique.

c) En déduire la matrice de composantes $G_{\mu\nu}$ représentant le bivecteur champ électromagnétique G dans le repère orthonormé $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ en termes des composantes d_1, d_2 et d_3 du vecteur champ de déplacement électrique et composantes h_1, h_2 et h_3 du pseudovecteur champ magnétique auxiliaire.

4 Quadrivecteurs dans l'espace-temps

Objectif : établir des relations physiques basées sur le carré de quadrivecteurs

Théorie : algèbre géométrique, relativité restreinte.

Difficulté : ☆☆☆☆ facultatif.

Dans un repère orthonormé fixe $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ de l'espace-temps, les quadrivecteurs position et quantité de mouvement s'écrivent,

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu\,\hat{e}_\mu = x_0\,\hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i\,\hat{e}_i = c\,t\,\hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i\,\hat{e}_i\,,$$

$$p = \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu\,\hat{e}_\mu = p_0\,\hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} p_i\,\hat{e}_i = \frac{e}{c}\,\hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} p_i\,\hat{e}_i\,.$$

a) Déterminer le carré de l'élément de longueur infinitésimale dx^2 à l'aide des produits géométriques $dx\,\hat{e}_0$ et $\hat{e}_0\,dx$.

b) Déterminer le carré du quadrivecteur quantité de mouvement p^2 à l'aide des produits géométriques $p\,\hat{e}_0$ et $\hat{e}_0\,p$ pour un point matériel de masse m, d'énergie $e = \gamma\,m\,c^2$ et de vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{p} = \gamma\,m\,\boldsymbol{v}$ où le coefficient de dilatation relativiste $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

c) En déduire le carré du quadrivecteur quantité de mouvement p^2 pour un photon de masse nulle, d'énergie $e = \hbar\,\omega$ et de vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{p} = \hbar\,\boldsymbol{k}$ et établir la relation de dispersion entre ω et $\boldsymbol{k}$.

5 Transformations de Lorentz dans l'algèbre d'espace-temps

Objectif : écrire les transformations de Lorentz en termes de rotors dans l'espace-temps.

Théorie : algèbre géométrique, relativité restreinte.

Difficulté : ⭐⭐⭐⭐ facultatif.

Le quadrivecteur position x est écrit en composantes cartésiennes en termes des vecteurs unitaires d'espace-temps des repères orthonormés $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ et $\{\hat{e}'_0, \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ associés aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ comme,

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu\,\hat{e}_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x'_\mu\,\hat{e}'_\mu\,.$$

Le référentiel d'inertie $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse relativiste constante $\beta\,c$ le long de l'axe vecteurs $\hat{e}_1$ et $\hat{e}'_1$ par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$. Les coordonnées du vecteur position x par rapport aux deux repères sont liées par les transformations de Lorentz directe et inverse,

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \Lambda_{\mu\nu}\,x_\nu \qquad \text{et} \qquad x_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \Lambda^{-1}_{\mu\nu}\,x'_\nu\,.$$

qui sont représentées matriciellement comme,

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} ,$$

où le facteur de dilatation relativiste s'écrit,

$$\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} .$$

a) Ecrire les relations entre les vecteurs unitaires des deux repères en termes des facteurs sans dimension β et γ et en déduire que les vecteurs unitaires des deux repères au carré sont invariants par transformation de Lorentz.

b) En définissant la rapidité α comme,

$$\beta = \tanh \alpha ,$$

montrer que les transformations de Lorentz des vecteurs unitaires $\hat{e}_0$ et $\hat{e}_1$ s'écrivent,

$$\hat{e}'_0 = e^{-\alpha\,\hat{e}_0\,\hat{e}_1}\,\hat{e}_0 \qquad \text{et} \qquad \hat{e}'_1 = e^{-\alpha\,\hat{e}_0\,\hat{e}_1}\,\hat{e}_1 .$$

c) En déduire que les transformations de Lorentz des vecteurs unitaires du repère s'écrivent,

$$\hat{e}'_\mu = L\,\hat{e}_\mu\,L^\dagger \qquad \text{où} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 ,$$

où les rotors dans l'espace-temps sont définis comme,

$$L = e^{-\hat{B}\,\alpha/2} \qquad \text{et} \qquad L^\dagger = e^{\hat{B}\,\alpha/2} \qquad \text{où} \qquad \hat{B} = \hat{e}_0\,\hat{e}_1 .$$